BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2015***

УДК 517.2 , 519.64

КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ АКУСТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ

***Ф.А.АБДУЛЛАЕВ, **Э.Г.ХАЛИЛОВ**

**** Бакинский Государственный Университет***

***** Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия***

xemm@mail.ru

Построена кубатурная формула для производной акустического потенциала простого слоя.

Ключевые слова: кубатурная формула, производный акустический потенциал простого слоя, поверхность Ляпунова.

Известно, что краевые задачи для уравнения Максвелла и краевые задачи для векторных уравнений Гельмгольца приводятся к системе сингулярных интегральных уравнений, зависящей от прямого значения производной акустического потенциала простого слоя (см. [1])

$$V(x)=\int_S grad_x \Phi_k(x,y)\,\rho(y)dS_y, \quad x=\left(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}\right)\in S, \tag{1.1}$$

где $S\subset R^3-$ поверхность Ляпунова с показателем $0<\alpha\le 1$, $\vec{n}(y)-$ внешняя единичная нормаль в точке $y\in S$, $\Phi_k(x,y)=e^{(ik|x-y|)}/\left(4\pi|x-y|\right)-$ фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, $k-$ волновое число, причем $\operatorname{Im}k\ge 0$, а $\rho(y)-$ непрерывная функция на поверхности S. Так как, невозможно найти точное решение этих уравнений, возникает интерес к численному реализацию этих уравнений. А для этого надо построить кубатурную формулу для прямого значения производной акустического потенциала простого слоя, к чему посвящена настоящая работа.

Разбиение поверхности

Возьмем достаточно малое значение параметра дискретизации h и разобьем S на элементарные области $S=\bigcup_{l=1}^{N(h)} S_l^h$:

(1) для каждого $l = \overline{1, N(h)}$ область S_l^h замкнута и множество $\overset{0}{S_l^h}$ – её внутренних относительно S точек не пусто, причем $mes\,\overset{0}{S_l^h} = mes S_l^h$ и $\overset{0}{S_l^h} \cap \overset{0}{S_j^h} = \emptyset$ при $j \in \{1, 2, ... N(h)\}$, $j \neq l$;

(2) для каждого $l = \overline{1, N(h)}$ область S_l^h представляет собой связный кусок поверхности S с непрерывной границей;

(3) для каждого $l = \overline{1, N(h)}$ $\quad diam S_l^h \leq h$;

(4) для каждого $l = \overline{1, N(h)}$ существует, так называемая, опорная точка $x_l = (x_{l,1}, x_{l,2}, x_{l,3}) \in S_l^h$, такая, что:

(4.1) $r_l(h) \sim R_l(h)$ $\quad$ ($r_l(h) \sim R_l(h) \Leftrightarrow C_1 \leq r_l(h)/R_l(h) \leq C_2$, C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от h), где $r_l(h) = \min\limits_{x \in \partial S_l^h} |x - x_l|$ и $R_l(h) = \max\limits_{x \in \partial S_l^h} |x - x_l|$;

(4.2) $(R_l(h))^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq d/2$, где d – радиус стандартной сферы (см. [2]);

(4.3) для каждого $j = \overline{1, N(h)}$ $\quad r_j(h) \sim r_l(h)$.

Очевидно, что $r(h) \sim R(h)$, где $R(h) = \max\limits_{l=\overline{1,N(h)}} R_l(h)$, $r(h) = \min\limits_{l=\overline{1,N(h)}} r_l(h)$.

Пусть $S_d(x)$ и $\Gamma_d(x)$ – части, соответственно, поверхности S и касательной плоскости $\Gamma(x)$ в точке $x \in S$, заключенные внутри сферы $B_d(x)$ радиуса d с центром в точке x. Кроме того, пусть $\tilde{y} \in \Gamma(x)$ есть проекция точки $y \in S$. Тогда

$$|x - \tilde{y}| \leq |x - y| \leq C_1(S)|x - \tilde{y}| \quad \text{и} \quad mes S_d(x) \leq C_2(S)\, mes \Gamma_d(x), \quad (2.1)$$

где $C_1(S)$ и $C_2(S)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от S (если S – сфера, то $C_1(S) = \sqrt{2}$ и $C_2(S) = 2$).

Лемма ([3]). *Существуют постоянные* $C_0' > 0$ *и* $C_1' > 0$, *не зависящие от* h *такие, что при* $\forall\, l, j \in \{1, 2, ..., N(h)\}$, $j \neq l$, *и* $\forall\, y \in S_j^h$ *справедливо неравенство* $C_0'|y - x_l| \leq |x_j - x_l| \leq C_1'|y - x_l|$.

Построение кубатурной формулы

Для непрерывной на S функции $\varphi(x)$ введем модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi, \delta) = \delta \sup_{\tau \geq \delta} \frac{\overline{\omega}(\varphi, \tau)}{\tau}, \quad \delta > 0, \quad \text{где} \quad \overline{\omega}(\varphi, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \leq \tau \\ x, y \in S}} |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

В работе [4] доказано, что если $\int\limits_0^{diam\, S} \frac{\omega(\rho,t)}{t} dt < +\infty$, то интеграл (1.1) существует в смысле главного значения Коши.

Пусть

$$P_l = \left\{ j \mid 1 \le j \le N(h)\,, \left| x_l - x_j \right| \le \left(R(h)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\},$$

$$Q_l = \left\{ j \mid 1 \le j \le N(h)\,, \left| x_l - x_j \right| > \left(R(h)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\}$$

и $V(x) = \left(V_1(x), V_2(x), V_3(x)\right)$, где

$$V_m(x) = \int\limits_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial x^{(m)}} \rho(y)\, dS_y, \quad x \in S \quad (m = 1,2,3).$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* S *- поверхность Ляпунова с показателем* $0 < \alpha \le 1$ *и* $\int\limits_0^{diam\, S} \frac{\omega(\rho,t)}{t} dt < +\infty$. *Тогда выражения*

$$V_m^{N(h)}(x_l) = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{N(h)} \frac{\left(ik\left|x_l - x_j\right| \exp\left(ik\left|x_l - x_j\right|\right) + \left(1 - \exp\left(ik\left|x_l - x_j\right|\right)\right)\right)\left(x_{l,1} - x_{j,1}\right)}{4\pi \left|x_l - x_j\right|^3} \rho\left(x_j\right) mesS_j^h +$$

$$\sum_{j \in Q_l} \frac{x_{j,1} - x_{l,1}}{4\pi \left|x_l - x_j\right|^3} \rho(x_j)\, mesS_j^h$$

в точках x_l, $l = \overline{1, N(h)}$, *является кубатурной формулой для* $V_m(x_l)$, *причем*

$$\max_{l=1,N(h)} \left| V_m(x_l) - V_m^{N(h)}(x_l) \right| \le M \left[\|\rho\|_\infty \left(R(h)\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \omega\left(\rho, R(h)\right) + \int\limits_0^{\left(R(h)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}} \frac{\omega(\rho,t)}{t} dt \right].$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать теорему при $m = 1$.

Нетрудно можно вычислить, что

$$V_1(x) = \int\limits_S \frac{\left(ik\left|x - y\right| \exp\left(ik\left|x - y\right|\right) + \left(1 - \exp\left(ik\left|x - y\right|\right)\right)\right)\left(x^{(1)} - y^{(1)}\right)}{4\pi \left|x - y\right|^3} \rho(y)\, dS_y +$$

$$\int\limits_S \frac{y^{(1)} - x^{(1)}}{4\pi \left|x - y\right|^3} \rho(y) dS_y, \quad x \in S, \tag{3.1}$$

где последний интеграл существует в смысле главного значения Коши.

Слагаемые в равенстве (3.1) обозначим через $L(x)$ и $F(x)$ соответственно.

Интеграл $L(x)$ является слабо сингулярным и для любого $x, y_1, y_2 \in S$ справедлива оценка

$$\left| \left(ik\,|x-y_1|\exp(ik|x-y_1|)+(1-\exp(ik|x-y_1|))\right)\left(x^{(1)}-y_1^{(1)}\right)- \right.$$
$$\left. \left(ik\,|x-y_2|\exp(ik|x-y_2|)+(1-\exp(ik|x-y_2|))\right)\left(x^{(1)}-y_2^{(1)}\right)\right| \le$$
$$M\left(|y_1-y_2||x-y_1|+|y_1-y_2||x-y_2|\right).$$

Тогда применяя известную теорему из работы [5], получаем, что выражения

$$L^{N(h)}(x_l)=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{N(h)}\frac{\left(ik\,|x_l-x_j|\exp(ik|x_l-x_j|)+(1-\exp(ik|x_l-x_j|))\right)(x_{l,1}-x_{j,1})}{4\pi|x_l-x_j|^3}\rho(x_j)\,mesS_j^h \quad (3.2)$$

в точках x_l, $l=\overline{1,N(h)}$, является кубатурной формулой для $L(x)$, причем

$$\max_{l=\overline{1,N(h)}}\left|L(x_l)-L^{N(h)}(x_l)\right|\le M\left[\|\rho\|_\infty R(h)\left|\ln(R(h))\right|+\omega(\rho,R(h))\right]. \quad (3.3)$$

Теперь построим кубатурную формулу для $F(x)$. Выражение

$$F^{N(h)}(x_l)=\sum_{j\in Q_l}\frac{x_{j,1}-x_{l,1}}{4\pi|x_l-x_j|^3}\rho(x_j)\,mesS_j^h \quad (3.4)$$

в точках $x_l, l=\overline{1,N(h)}$, является кубатурной формулой для $F(x)$. Оценим погрешность кубатурной формулой (3.4). Очевидно, что

$$F(x_l)-F^{N(h)}(x_l)=\frac{1}{4\pi}\sum_{j\in Q_l}\int_{S_j^h}\left(\frac{y^{(1)}-x_{l,1}}{|x_l-y|^3}-\frac{x_{j,1}-x_{l,1}}{|x_l-x_j|^3}\right)\rho(y)dS_y+\frac{1}{4\pi}\int_{G_l}\frac{y^{(1)}-x_{l,1}}{|x_l-y|^3}(\rho(y)-\rho(x))dS_y+$$
$$\frac{\rho(x)}{4\pi}\int_{G_l}\frac{y^{(1)}-x_{l,1}}{|x_l-y|^3}dS_y, \text{ где } G_l=\bigcup_{j\in P_l}S_j^h.$$

Пусть $y\in S_j^h$, $j\in Q_l$. Тогда

$$\left|\frac{y^{(1)}-x_{l,1}}{|x_l-y|^3}-\frac{x_{j,1}-x_{l,1}}{|x_l-x_j|^3}\right|\le M\frac{R(h)}{|x_l-y|^3}.$$

Отсюда находим

$$\left|\frac{1}{4\pi}\sum_{j\in Q_l}\int_{S_j^h}\left(\frac{y^{(1)}-x_{l,1}}{|x_l-y|^3}-\frac{x_{j,1}-x_{l,1}}{|x_l-x_j|^3}\right)\rho(y)dS_y\right|\le M\|\rho\|_\infty R(h)\int_{(R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{diam\,S}\frac{dt}{t^2}\le M\|\rho\|_\infty (R(h))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Пусть $y \in \partial G_l$. Очевидно, что существуют натуральные числа $k \in P_l$ и $m \in Q_l$ такие, что $y \in \partial S_k^h$ и $y \in \partial S_m^h$. Отсюда имеем:

$$|x_l - y| \le |x_l - x_k| + |x_k - y| \le (R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}} + R(h)$$

и

$$|x_l - y| \ge |x_l - x_m| - |x_m - y| > (R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(h),$$

а, значит

$$(R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(h) < |x_l - y| \le (R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}} + R(h), \quad \forall\, y \in \partial G_l. \qquad (3.5)$$

Тогда

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_{G_l} \frac{y^{(1)} - x_{l,1}}{|x_l - y|^3} (\rho(y) - \rho(x)) dS_y \right| \le M \int_0^{(R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}} + R(h)} \frac{\omega(\rho, t)}{t} dt \le M \int_0^{(R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}} \frac{\omega(\rho, t)}{t} dt.$$

Известно (см.[2]), что $S_d(x_l)$ пересекается с прямой, параллельной нормали $\vec{n}(x_l)$, в единственной точке, либо вообще не пересекается, т.е. множество $S_d(x_l)$ однозначно проектируется на множество $\Omega_d(x_l)$, лежащего в круге радиуса d с центром в точке x_l на касательной плоскости $\Gamma(x_l)$ к S в точке x_l. На куске $S_d(x_l)$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u, v, w) с началом в точке x_l, где ось w направим вдоль нормали $\vec{n}(x_l)$ (оси u и v будут лежать на касательной плоскости $\Gamma(x_l)$). Тогда в этих координатах окрестность $S_d(x_l)$ можно задать уравнением

$$w = f(u, v), \quad (u, v) \in \Omega_d(x_l),$$

причем

$$f \in C^{1,\alpha}(\Omega_d(x_l)) \quad \text{и} \quad f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial v} = 0.$$

Через Ω_l^h обозначим проекцию множества G_l на касателную плоскость $\Gamma(x_l)$. Пусть $d_h = \min\limits_{\tilde{y} \in \partial \Omega_l^h} |x_l - \tilde{y}|$ и $O_{d_h}(x_l) = \{u^2 + v^2 < d_h\} \subset \Gamma(x_l)$ (очевидно, что $O_{d_h}(x_l) \subset \Omega_l^h$). Тогда по формуле сведения поверхностного интеграла к повторному, получаем, что

$$\int_{G_l} \frac{y^{(1)} - x_{l,1}}{|x_l - y|^3} dS_y = \int_{O_{d_h}(x_l)} \frac{u}{\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)^3} du dv + \int_{O_{d_h}(x_l)} \frac{u\left(\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} - 1\right)}{\left(\sqrt{u^2 + v^2 + f^2(u, v)}\right)^3} du dv +$$

$$\int\limits_{O_{d_h}(x_l)} u\left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}\right)dudv+\int\limits_{\Omega_l^h\setminus O_{d_h}(x_l)}\frac{u\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)}\right)^3}dudv\cdot \quad (3.6)$$

Первый интеграл в правой части (3.6) существует в смысле главного значения Коши и равен нулю. Действительно, перейдя к полярной системе координат, находим

$$\int\limits_{O_{d_h}(x_l)}\frac{u}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}dudv=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{d_h}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r}d\varphi\,dr=0\,.$$

Кроме того, учитывая неравенства

$$\left|\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}-1\right|\le M\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{2\alpha}\ ,\quad (u,v)\in O_{d_h}(x_l)$$

и

$$\left|\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}\right|\le M\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{3-2\alpha}}\,,$$

$(u,v)\in O_{d_h}(x_l),(u,v)\ne(0,0)$,

и перейдя к полярной системе координат, имеем:

$$\left|\int\limits_{O_{d_h}(x_l)}\frac{u}{\left(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)}\right)^3}\left(\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}-1\right)dudv\right|\le M\,(R(h))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}$$

$$\left|\int\limits_{O_{d_h}(x_l)}u\left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}\right)dudv\right|\le M\,(R(h))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\ .$$

Теперь оценим последний слагаемый интеграл в равенстве (3.6). Прежде всего, существует точка $\tilde{y}_h\in\Omega_l^h$ такая, что $d_h=\left|x_l-\tilde{y}_h\right|$. Обозначим через $y_h\in\partial G_l$ прообраз точки $\tilde{y}_h$. Применяя неравенство (3.5), получаем, что

$$d_h=\left|x_l-y_h\right|\cos\alpha\left(x_ly_h,x_l\tilde{y}_h\right)=\left|x_l-y_h\right|\sqrt{1-\cos^2\alpha\left(x_ly_h,n(x_l)\right)}\ge\left|x_l-y_h\right|\sqrt{1-M^2\left|x_l-y_h\right|^{2\alpha}}\ge$$

$$\left((R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(h)\right)\sqrt{1-M^2\left((R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(h)\right)^{2\alpha}}\ge\left((R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(h)\right)\sqrt{1-M^2\left(2(R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}\right)^{2\alpha}}=$$

$$\left((R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(h)\right)\sqrt{\left(1-2^{\alpha}M\,(R(h))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)\left(1+2^{\alpha}M\,(R(h))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)}\ge$$

$$\left((R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(h)\right)\left(1-2^{\alpha}M\,(R(h))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)\ge(R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}-(1+2^{\alpha}M)\,R(h)\cdot$$

Тогда

$$\left| \int\limits_{\Omega_l^h \setminus O_{d_h}(x_l)} \frac{u\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+f^2(u,v)}\right)^3}\,dudv \right| \le$$

$$\le M \int\limits_{(R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}-(1+2^{\alpha}M)R(h)}^{(R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(h)} \frac{dt}{t} \le M \frac{\left(2+2^{\alpha}M\right)R(h)}{(R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(h)(1+2^{\alpha}M)} \le M\,(R(h))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

В результате получаем, что

$$\left| F(x_l)-F^{N(h)}(x_l) \right| \le M\left(\|\rho\|_{\infty}(R(h))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \int\limits_0^{(R(h))^{\frac{1}{1+\alpha}}} \frac{\omega(\rho,t)}{t}\,dt \right). \qquad (3.7)$$

Суммируя оценки (3.3) и (3.7), получаем доказательству теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987, 311с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976, 527с.
3. Кустов Ю.А., Мусаев Б.И. Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения. Деп. В ВИНИТИ. No4281-81-60с.
4. Khalilov E.H. On Direct Value of the Derivative of an Acoustic Single Layer Potential. Transactions of NAS of Azerbaijan ser. of Phys.-Technical and Math. Science, 2014, v.34, No4, pp.143-148.
5. Khalilov E.H. Cubic Formula for Class of Weakly Singular Surface Integrals.- Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2013, v. 39 (47), p. 69.

AKUSTİK SADƏ LAY POTENSİALININ TÖRƏMƏSİ ÜÇÜN KUBATUR DÜSTUR

F.A.ABDULLAYEV, E.H.XƏLİLOV

XÜLASƏ

İşdə akustik sadə lay potensialının törəməsi üçün kubatur düstur qurulmuşdur.

Açar sözlər: kubatur düstur, akustik sadə lay potensialının törəməsi, Lyapunov səthi.

CUBIC FORMULA FOR THE DERIVATIVE
OF SINGLE LAYER ACOUSTIC POTENTIAL

F.A.ABDULLAYEV, E.H.KHALILOV

SUMMARY

In the paper, a cubic formula is constructed for the derivative of a single layer acoustic potential.

Key words: cubic formula, derivative of a single layer acoustic potential, Lyapunov surface.

Принято в редакцию: 09.02.2015 г.
Подписано к печати: 20.04.2015 г.